

Dạng 3: Xác định thiết diện

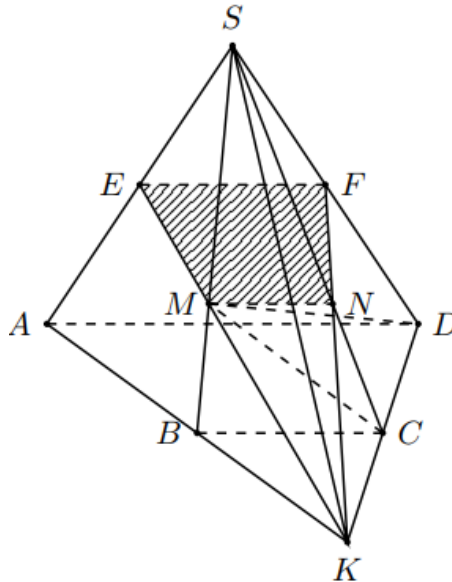
Phương pháp: Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang ($AD \parallel BC, AD > BC$). Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SB, SC sao cho $SM = 2MB, SN = 2NC$.

- a) Gọi $K = AB \cap CD$. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (KMN) .
b) Cho $AD = 2BC$. Tính tỉ số diện tích của tam giác KMN và diện tích thiết diện vừa tìm ở câu trên.

Lời giải



- a) Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (KMN) .

Trong mp(SCD), gọi $F = KN \cap SD$ thì mặt phẳng (KMN) cắt hình chóp theo thiết diện là tứ giác $MNFE$.

- b. Tỉ số diện tích của tam giác KMN và diện tích thiết diện vừa tìm ở câu trên.

Khi $AD = 2BC$ thì BC là đường trung bình của tam giác KAD

$\Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác SAK và E là trung điểm SA .

Tương tự F là trung điểm cạnh SD

Khi đó EF là đường trung bình của tam giác $SAD \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AD$.

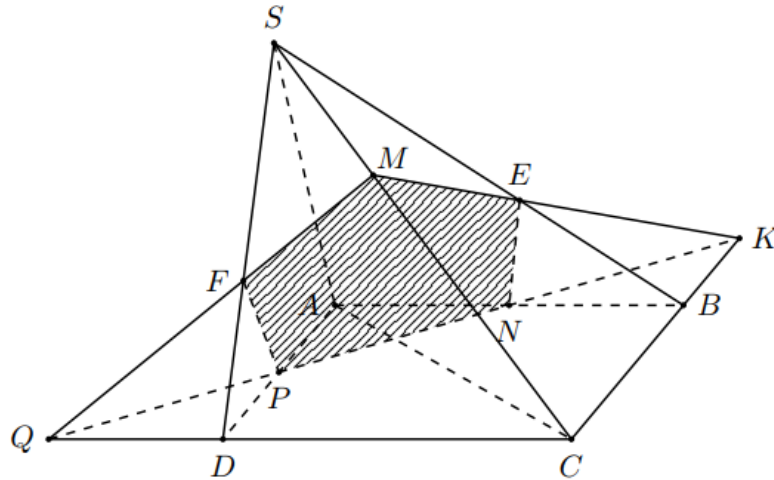
Mặt khác theo giả thiết, ta có $SM = 2MB, SN = 2NC \Rightarrow MN = \frac{2}{3}BC = \frac{1}{3}AD$

$$\text{Vì } \frac{MN}{EF} = \frac{2}{3} \text{ nên } \frac{S_{KMN}}{S_{KEF}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow S_{KMN} = \frac{4}{9}S_{KEF}; S_{MNFE} = \frac{5}{9}S_{KEF}$$

$$\text{Vậy } \frac{S_{KMN}}{S_{MNFE}} = \frac{4}{5}.$$

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ và M là một điểm trên cạnh SC , N và P lần lượt là trung điểm của AB và AD . Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) .

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $Q = NP \cap CD$ và $K = NP \cap BC$

Trong mặt phẳng (SBC) gọi $E = SB \cap KM$, trong mặt phẳng (SAD) gọi $F = SD \cap QM$.

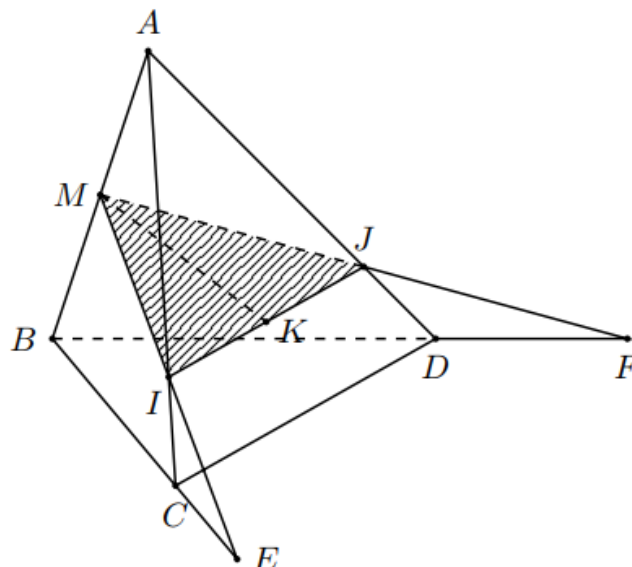
Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là ngũ giác $NEMFP$.

Bài tập 3: Cho tứ diện đều $ABCD$, cạnh bằng a . Kéo dài BC một đoạn $CE = a$. Kéo dài BD một đoạn $DF = a$. Gọi M là trung điểm của AB .

a) Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MEF) .

b) Tính diện tích của thiết diện.

Lời giải



a) Trong mặt phẳng (ABC) : Dựng ME cắt AC tại I .

Trong mặt phẳng (ABD) : Dựng MF cắt AD tại J .

Từ đó thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MEF) là $\triangle MIJ$.

b) Theo cách dựng thì I và J lần lượt là trọng tâm tam giác ABE và ABF

$$\Rightarrow \begin{cases} AI = \frac{2}{3} AC = \frac{2a}{3} \\ AJ = \frac{2}{3} AD = \frac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{tam giác } AIJ \text{ đều} \Rightarrow IJ = \frac{2a}{3}.$$

Mặt khác $AI = AJ$ nên $\triangle AMI = \triangle AMJ \Rightarrow MI = MJ$.

Trong $\triangle AMI$, $MI = \sqrt{MA^2 + IA^2 - 2MA \cdot IA \cdot \cos A} = \frac{a\sqrt{13}}{6}$.

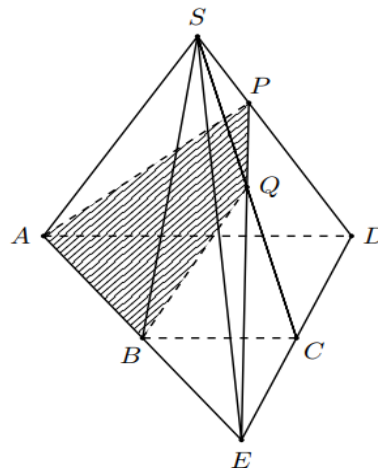
$$S_{\triangle MIJ} = \frac{1}{2} IJ \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot 2 \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{13}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{a^2}{6}.$$

Bài tập 4: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD .

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB)

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) .

Lời giải

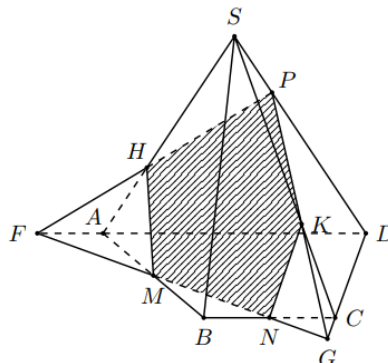


a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$.

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $Q = SC \cap EP$.

Ta có $E \in AB$ nên $EP \subset (ABP) \Rightarrow Q \in (ABP)$, do đó $Q = SC \cap (ABP)$.

Thiết diện là tứ giác $ABQP$.



b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi F, G lần lượt là các giao điểm của MN với AD và CD

Trong mặt phẳng (SAD) gọi $H = SA \cap FP$

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $K = SC \cap PG$.

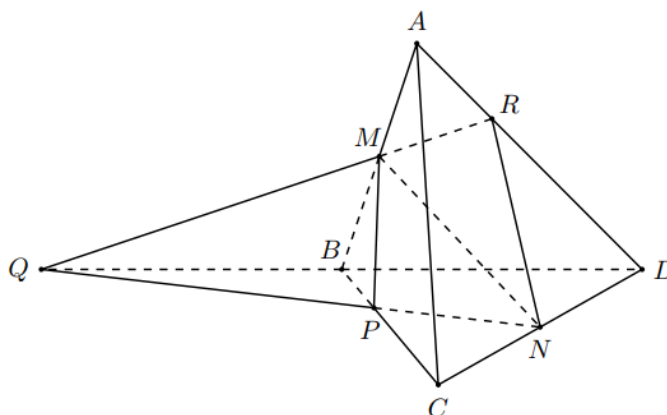
Ta có $F \in MN \Rightarrow F \in (MNP), \Rightarrow FP \subset (MNP) \Rightarrow H \in (MNP)$

Vậy $\begin{cases} H \in SA \\ H \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = SA \cap (MNP)$ Tương tự $K = SC \cap (MNP)$.

Thiết diện là ngũ giác $MNKPH$.

Bài tập 5: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và P là một điểm thuộc cạnh BC (P không là trung điểm của BC). Tìm thiết diện của tứ diện bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) .

Lời giải

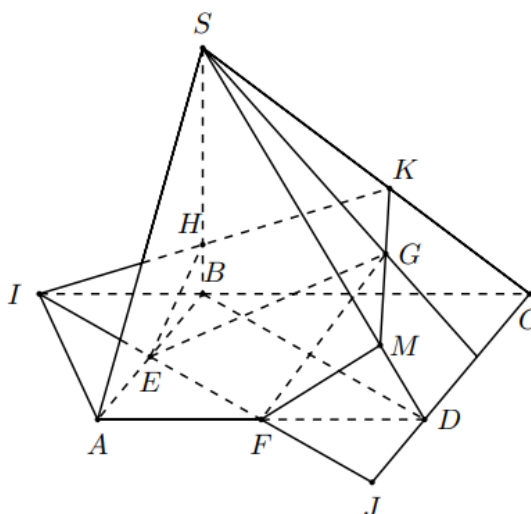


Gọi $Q = NP \cap BD$. Gọi $R = QM \cap AD$. Suy ra: $Q \in (MNP)$ và $R \in (MNP)$.

Vậy thiết diện của tứ diện bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác $MRNP$.

Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABCD$, G là điểm nằm trong tam giác SCD . E, F lần lượt là trung điểm của AB và AD . Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (EFG) .

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$: $EF \cap BC = I$; $EF \cap CD = J$

Trong mặt phẳng (SCD) : $GJ \cap SC = K$; $GJ \cap SD = M$

Trong mặt phẳng (SBC) : $KI \cap SB = H$

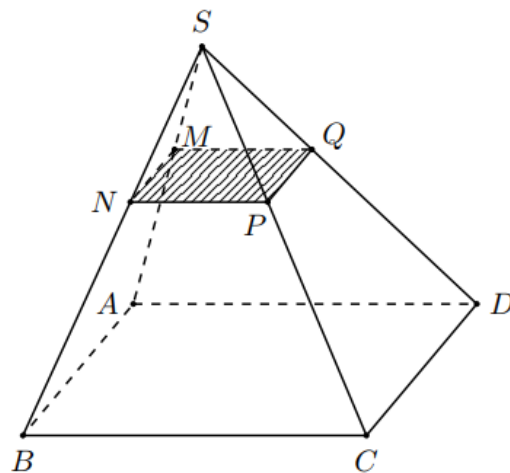
Ta có: $(GEF) \cap (ABCD) = EF$, $(GEF) \cap (SAD) = FM$, $(GEF) \cap (SCD) = MK$

$(GEF) \cap (SBC) = KH$, $(GEF) \cap (SAB) = HE$

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) là ngũ giác $EFMKH$.

Bài tập 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a ($a > 0$). Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi Q là trung điểm của SD .

Tam giác SAD có M, Q lần lượt là trung điểm của SA, SD suy ra $MQ \parallel AD$.

Tam giác SBC có N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC suy ra $NP \parallel BC$.

Mặt khác $AD \parallel BC$ suy ra $MQ \parallel NP$ và $MQ = NP \Rightarrow MNPQ$ là hình vuông.

Khi đó M, N, P, Q đồng phẳng $\Rightarrow (MNP)$ cắt SD tại Q và $MNPQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (MNP) .

Vậy diện tích hình vuông $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = \frac{S_{ABCD}}{4} = \frac{a^2}{4}$.

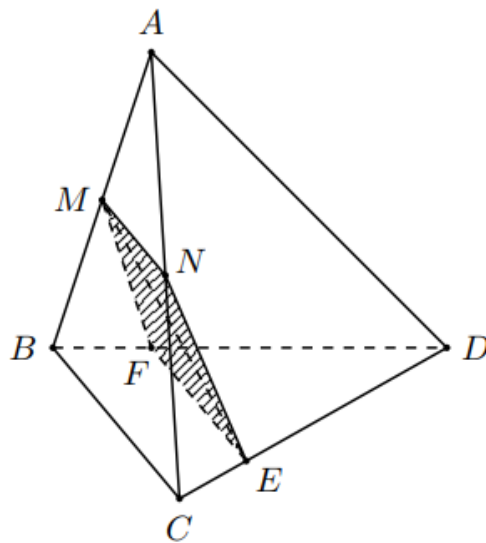
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC , E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

- A. Tam giác MNE .
- B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD .
- C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.
- D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

Lời giải.



Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC .

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN \parallel BC$.

Từ E kẻ đường thẳng d song song với BC và cắt BD tại $F \Rightarrow EF \parallel BC$.

Do đó $MN \parallel EF$ suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng và $MNEF$ là hình thang.

Vậy hình thang $MNEF$ là thiết diện cần tìm.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, E là trung điểm của SA , F, G lần lượt là các điểm thuộc cạnh BC, CD ($CF < FB, GC < GD$). Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

- A. Tam giác.
- B. Tứ giác.
- C. Ngũ giác.
- D. Lục giác.

Lời giải

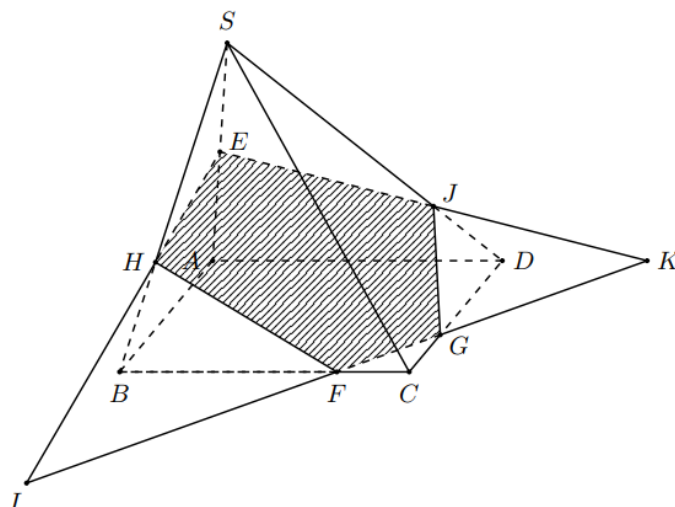
Trong $(ABCD)$, gọi $I = FG \cap AB; K = FG \cap AD$

Trong (SAB) , gọi $H = IE \cap SB$.

Trong (SAD) , gọi $J = EK \cap SD$.

$(EFG) \cap (ABCD) = FG, (EFG) \cap (SCD) = JG, (EFG) \cap (SAD) = JE, (EFG) \cap (SAB) = HE$
 $, (EFG) \cap (SBC) = HF.$

Do đó thiết diện là ngũ giác $EJGFH$.



Câu 3: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD . Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB) là hình gì?

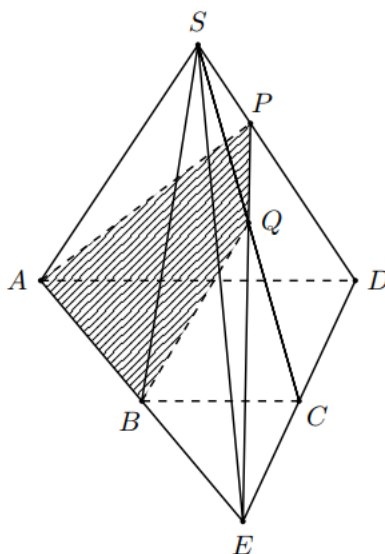
A. Tam giác

B. Tứ giác

C. Hình thang

D. Hình bình hành

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$.

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $Q = SC \cap EP$.

Ta có $E \in AB$ nên $EP \subset (ABP) \Rightarrow Q \in (ABP)$, do đó $Q = SC \cap (ABP)$.

Thiết diện là tứ giác $ABQP$.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) là hình gì?

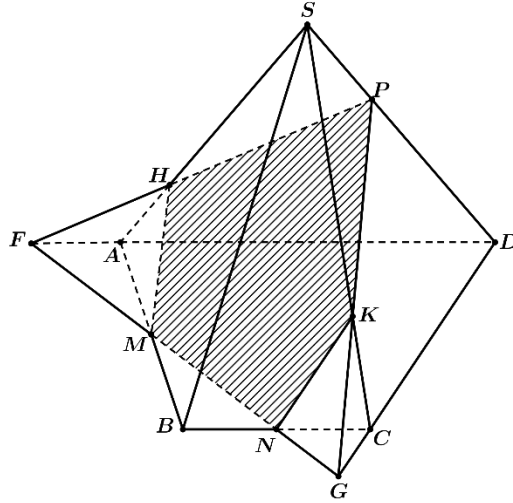
A. Ngũ giác

B. Tứ giác

C. Hình thang

D. Hình bình hành

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi F, G lần lượt là các giao điểm của MN với AD và CD

Trong mặt phẳng (SAD) gọi $H = SA \cap FP$

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $K = SC \cap PG$.

Ta có $F \in MN \Rightarrow F \in (MNP), \Rightarrow FP \subset (MNP) \Rightarrow H \in (MNP)$

Vậy $\begin{cases} H \in SA \\ H \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = SA \cap (MNP)$ Tương tự $K = SC \cap (MNP)$.

Thiết diện là ngũ giác $MNKPH$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là:

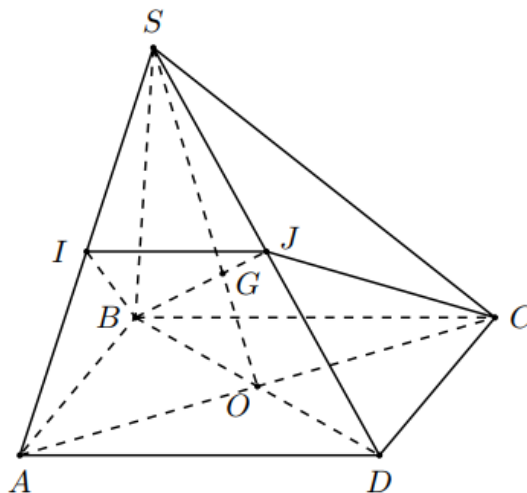
A. Tam giác IBC .

B. Hình thang $IJCB$ (J là trung điểm SD).

C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB).

D. Tứ giác $IBCD$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD , G là giao điểm của CI và SO .

Khi đó G là trọng tâm tam giác SAC . Suy ra G là trọng tâm tam giác SBD .

Gọi $J = BG \cap SD$. Khi đó J là trung điểm SD .

Do đó thiết diện của hình chóp cắt bởi (IBC) là hình thang $IJCB$ (J là trung điểm SD).

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P là ba điểm trên các cạnh AD, CD, SO . Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là hình gì?

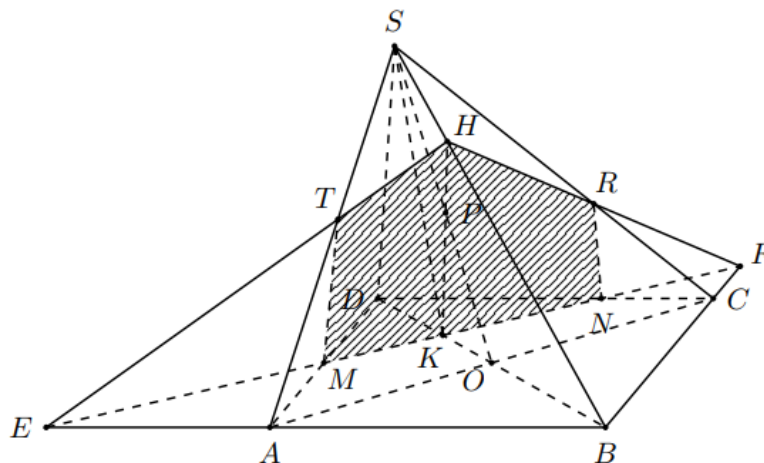
A. Ngũ giác

B. Tứ giác

C. Hình thang

D. Hình bình hành

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi E, K, F lần lượt là giao điểm của MN với DA, DB, DC .

Trong mặt phẳng (SDB) gọi $H = KP \cap SB$

Trong mặt phẳng (SAB) gọi $T = EH \cap SA$

Trong mặt phẳng (SBC) gọi $R = FH \cap SC$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} E \in MN \\ H \in KP \end{cases} \Rightarrow EH \subset (MNP), \begin{cases} T \in SA \\ T \in EH \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow T = SA \cap (MNP).$$

Lí luận tương tự ta có $R = SC \cap (MNP)$.

Thiết diện là ngũ giác $MNRHT$.

Câu 7: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (GCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

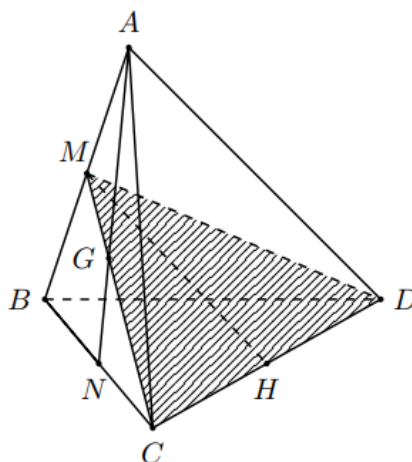
A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Goi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC suy ra $AN \cap MC = G$.

Dễ thấy mặt phẳng (GCD) cắt đường thẳng AB tại điểm M .

Suy ra tam giác MCD là thiết diện của mặt phẳng (GCD) và tứ diện $ABCD$.

Tam giác ABD đều, có M là trung điểm AB suy ra $MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều, có M là trung điểm AB suy ra $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là trung điểm của $CD \Rightarrow MH \perp CD \Rightarrow S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2} \cdot MH \cdot CD$

$$\text{Với } MH = \sqrt{MC^2 - HC^2} = \sqrt{MC^2 - \frac{CD^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $2a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm các cạnh AC , BC ; P là trọng tâm tam giác BCD . Mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

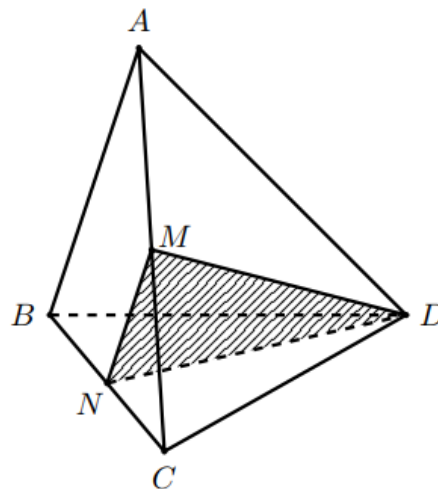
A. $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{11}}{4}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Trong tam giác BCD có: P là trọng tâm, N là trung điểm BC . Suy ra N , P , D thẳng hàng.

Vậy thiết diện là tam giác MND .

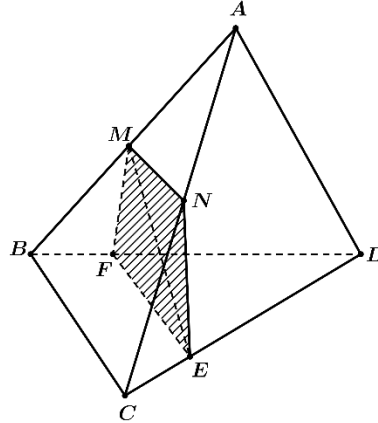
Xét tam giác MND , ta có $MN = \frac{AB}{2} = a$; $DM = DN = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Do đó tam giác MND cân tại D . Gọi H là trung điểm MN suy ra $DH \perp MN$.

$$\text{Diện tích tam giác } S_{\Delta MND} = \frac{1}{2} MN \cdot DH = \frac{1}{2} MN \cdot \sqrt{DM^2 - MH^2} = \frac{a^2\sqrt{11}}{4}.$$

- Câu 9:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC , E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:
- A. Tam giác MNE .
 B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD .
 C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.
 D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

Lời giải



Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC .

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN \parallel BC$.

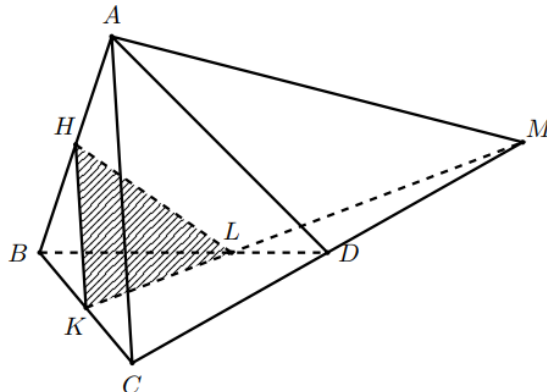
Từ E kẻ đường thẳng d song song với BC và cắt BD tại $F \Rightarrow EF \parallel BC$.

Do đó $MN \parallel EF$ suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng và $MNEF$ là hình thang.

Vậy hình thang $MNEF$ là thiết diện cần tìm.

- Câu 10:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Trên đường thẳng CD lấy điểm M nằm ngoài đoạn CD . Thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (HKM) là:
- A. Tứ giác $HKMN$ với $N \in AD$.
 B. Hình thang $HKMN$ với $N \in AD$ và $HK \parallel MN$.
 C. Tam giác HKL với $L = KM \cap BD$.
 D. Tam giác HKL với $L = HM \cap AD$.

Lời giải



Ta có HK, KM là đoạn giao tuyến của (HKM) với (ABC) và (BCD) .

Trong mặt phẳng (BCD) , do KM không song song với BD nên gọi $L = KM \cap BD$.

Vậy thiết diện là tam giác HKL .

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB // CD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC . Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (SG_1G_2) và hình chóp $S.ABCD$ là:

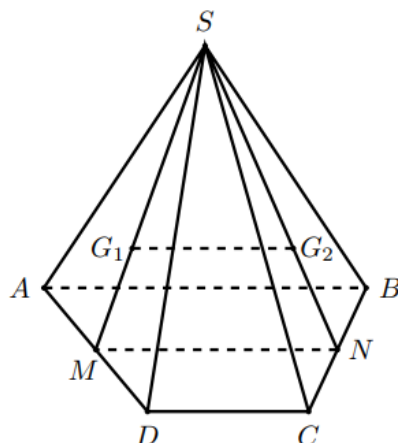
A. Tam giác có một đỉnh là G_1 .

B. Tam giác có cạnh là G_1G_2 .

C. Tam giác có một đỉnh là S .

D. Tứ giác.

Lời giải



(SG_1G_2) cắt (SAD) theo giao tuyến SM , với M là trung điểm của AD

(SG_1G_2) cắt (SBC) theo giao tuyến SN , với N là trung điểm của BC

(SG_1G_2) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến MN

Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (SG_1G_2) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác SMN

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, BC , điểm I thuộc cạnh SA thỏa mãn $SI = 3IA$. Mặt phẳng (α) đi qua P và song song với mặt phẳng (IMN) cắt hình chóp theo một thiết diện là hình gì?

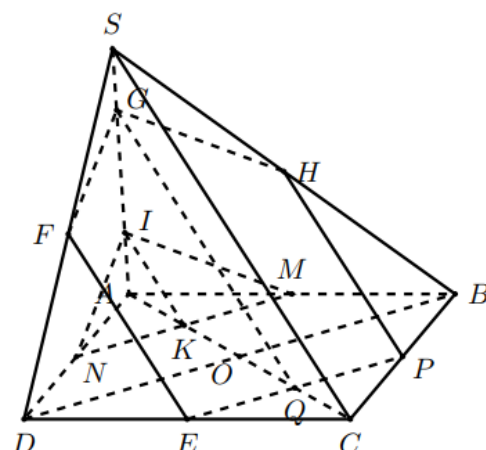
A. Tứ giác.

B. Ngũ giác.

C. Lục giác.

D. Tam giác.

Lời giải



P là một điểm chung của (α) và mặt phẳng $(ABCD)$ nên giao tuyến của (α) và mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng đi qua P và song song với MN , giao tuyến này cắt CD và AC lần lượt tại E và Q .

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi K là giao điểm của AC và MN .

Q là một điểm chung của (α) và mặt phẳng (SAC) nên giao tuyến của (α) và mặt phẳng (SAC) là đường thẳng đi qua Q và song song với IK , giao tuyến này cắt SA tại G .

G là một điểm chung của (α) và mặt phẳng (SAB) nên giao tuyến của (α) và mặt phẳng (SAB) là đường thẳng đi qua G và song song với IM , giao tuyến này cắt SB tại H .

G là một điểm chung của (α) và mặt phẳng (SAD) nên giao tuyến của (α) và mặt phẳng (SAD) là đường thẳng đi qua G và song song với IN , giao tuyến này cắt SD tại F .

Vậy thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp (α) là ngũ giác $EFGHP$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB // CD, AB > CD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm SB và SC .

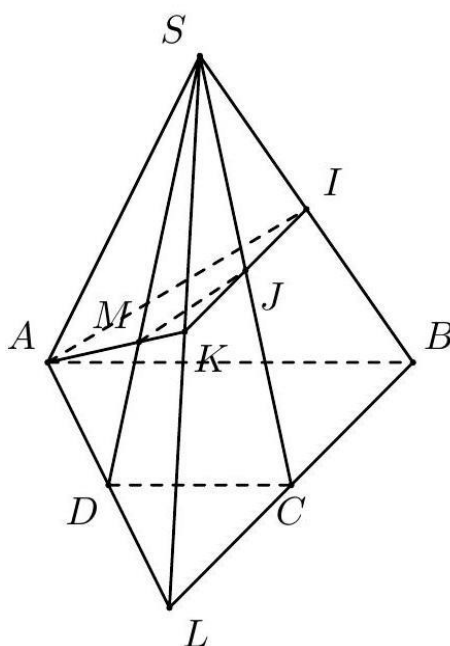
a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng SL với L là giao điểm của của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)

b) Giao điểm của đường thẳng SD với (AIJ) là điểm M với M là giao điểm của SD và AK

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (AIJ) và (SCD) là đường thẳng MJ

d) Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AIJ) là một tam giác.

Lời giải



a) Đúng: Xác định giao tuyến của (SAD) và (SBC)

Ta có: $S \in (SAD) \cap (SBC)$ (1)

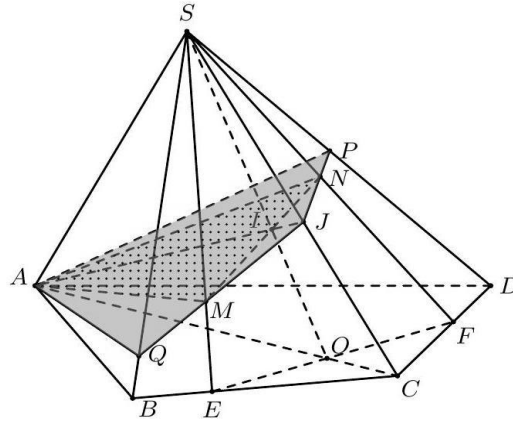
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $N = AD \cap BC \Rightarrow L \in (SAD) \cap (SBC)$ (2)

Ta có: $(SAC) \cap (AMN) = AI$.

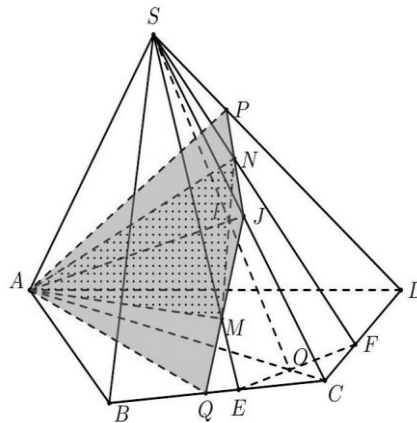
Trong mặt phẳng (SAC) hai đường thẳng AI và SC phải cắt nhau, gọi giao điểm này là J thì J chính là giao điểm của SC với (AMN) .

c) Đúng: Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (AMN) .

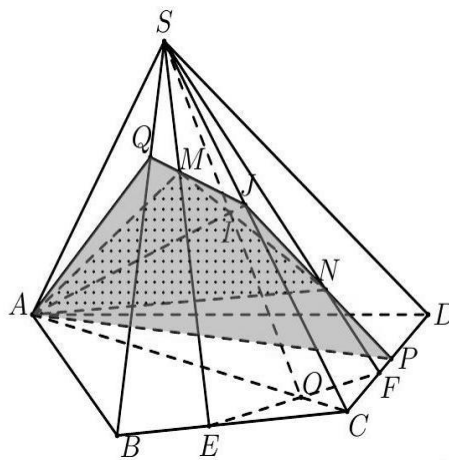
Trường hợp 1: Đường thẳng MJ cắt cạnh SB tại Q và đường thẳng JN cắt cạnh SD tại P .
Ta thấy thiết diện là tứ giác $AQJP$.



Trường hợp 2: Đường thẳng MJ cắt cạnh BC tại Q và đường thẳng JN cắt cạnh SD tại P .
Ta thấy thiết diện là tứ giác $AQJP$.



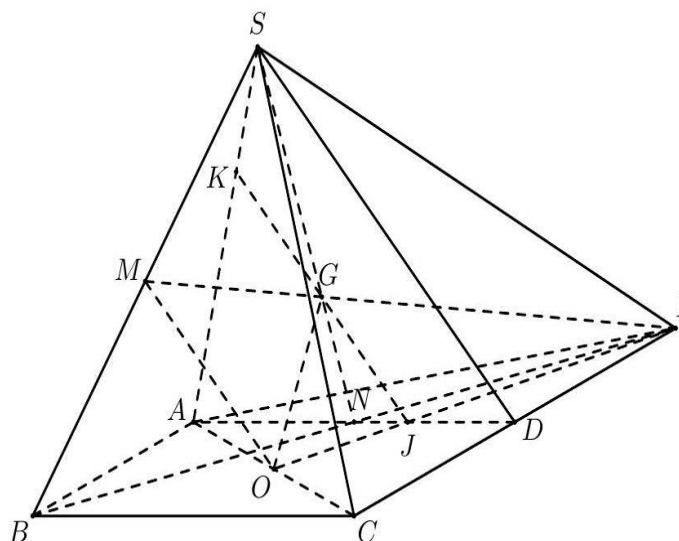
Trường hợp 3: Đường thẳng MJ cắt cạnh SB tại Q và đường thẳng JN cắt cạnh CD tại P .
Ta thấy thiết diện là tứ giác $AQJP$.



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SB , G là trọng tâm tam giác SAD .

- a) Giao điểm I của GM với $(ABCD)$ cũng là giao điểm của hai đường thẳng MG và BN . Khi đó $2IC = ID$.
- b) Giao điểm của hai đường thẳng AD và OI là J và nó cũng là giao điểm của mặt phẳng (OMG) với AD . Khi đó $JA = 2JD$.
- c) Điểm K là giao điểm của (OMG) với SA cũng là giao điểm của hai đường thẳng SA và GJ . Khi đó $KA = \frac{1}{2}KS$.
- d) Thiết diện tạo bởi (OMG) với hình chóp $S.ABCD$ là một ngũ giác

Lời giải



- a) Gọi N là trung điểm của AD . Chọn mặt phẳng phụ chứa MG là (SBN)

Ta có: $(SBN) \cap (ABCD) = BN$ và MG và BN đồng phẳng $\Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2} \neq \frac{SG}{GN} = \frac{2}{3}$.

Suy ra hai đường thẳng MG và BN phải cắt nhau. Đó chính là giao điểm I của MG với $(ABCD)$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SBN với ba điểm thẳng hàng M, G, I ta có:

$$\frac{SM}{MB} \cdot \frac{BI}{IN} \cdot \frac{NG}{GS} = 1 \Leftrightarrow \frac{BI}{IN} = 2 \Leftrightarrow BI = 2BN \text{ suy ra } N \text{ là trung điểm của } BE.$$

Gọi E là điểm đối xứng với C qua D thì $EC = 2ED$ đồng thời N là trung điểm của BE .

Do đó, hai điểm I và E trùng nhau. Vậy ta có $IC = 2ID$.

- b) Đặt $JA = k.JD$. Chọn mặt phẳng phụ chứa AD là $(ABCD)$ ta có $(ABCD) \cap (OMG) = OI$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ hai đoạn thẳng AD và OI phải cắt nhau, đó là giao điểm J của AD với (OMG) .

Tam giác ACI có IO và AD là hai đường trung tuyến, J là giao điểm của hai đoạn thẳng này nên J là trọng tâm suy ra $JA = 2JD$.

- c) Đúng: Chọn mặt phẳng phụ chứa SA là (SAD) . Ta có $(SAD) \cap (OMG) = GJ$.

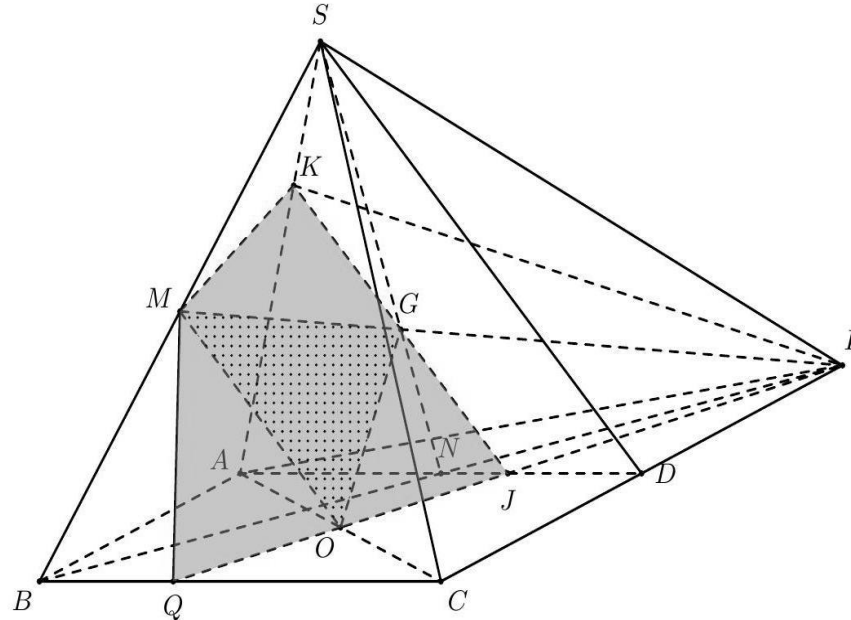
Trong mặt phẳng (SAD) hai đường thẳng SA và GJ phải cắt nhau, đó là giao điểm K của SA với (OMG) .

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SAK với ba điểm thẳng hàng G, J, I ta có

$$\frac{SK}{KA} \cdot \frac{AJ}{JN} \cdot \frac{NG}{GS} = 1 \Leftrightarrow \frac{SK}{KA} = \frac{1}{2}$$

d) Sai: Tìm thiết diện tạo bởi (OMG) với hình chóp $S.ABCD$.

Gọi Q là giao điểm của đường thẳng OI và cạnh BC . Thiết diện mà mặt phẳng (OMG) cắt hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $QMKJ$



Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và OC .

a) Giao tuyến của (MNP) với (SAC) là đường thẳng PI với I là giao điểm của hai đường thẳng MN và SO .

b) Giao điểm của SA và (MNP) là R với R là giao điểm của hai đường thẳng PI và SA

c) Gọi $T = d \cap BC, Q = d \cap CD$. Khi đó thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là ngũ giác $MTQNR$.

d) Tỉ số $\frac{SR}{RA} = 3$

Lời giải

a) Đúng: Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAC) .

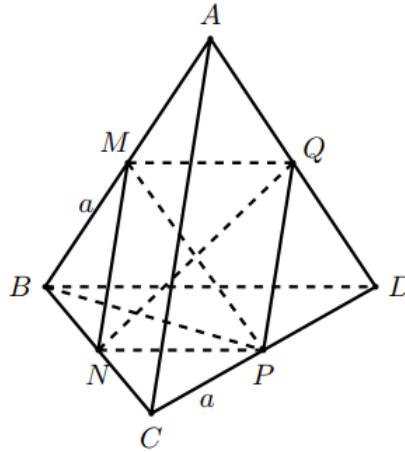
P là điểm chung thứ nhất của (MNP) và (SAC) .

Trong tam giác SAC , hai đoạn thẳng MN và SO phải cắt nhau. Gọi giao điểm này là I thì I là điểm chung thứ hai của (MNP) và (SAC) . Vậy $(MNP) \cap (SAC) = PI$.

Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a . Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của AB, BC, CD . Mặt phẳng (MNP) tạo với hình tứ diện một thiết diện có diện tích là S . Khi $a = 2$ thì giá trị của S bằng bao nhiêu?

Lời giải

Do M, N, P tương ứng là trung điểm của AB, BC, CD suy ra $MN \parallel AC, NP \parallel BD$ nên mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q và có $MQ \parallel BD, PQ \parallel AC$.



Ta có $MN = PQ = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}; MQ = NP = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2} \Rightarrow MNPQ$ là hình thoi.

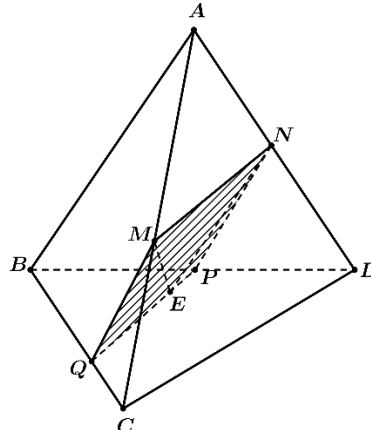
Vì các tam giác BCD, ACD đều cạnh a nên đường cao $BP = AP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó tam giác ABP cân tại P nên đường cao $MP = \sqrt{BP^2 - BM^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tương tự ta tính được $NQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó diện tích thiết diện là $S = \frac{1}{2}MP \cdot NQ = \frac{a^2}{4} \xrightarrow{a=2} S = 1$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh cùng bằng a , M là điểm thuộc cạnh AC sao cho $2MC = MA$. N là trung điểm AD , E là điểm nằm trong tam giác BCD sao cho $(MNE) \parallel AB$. Gọi S là diện tích của thiết diện của hình tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MNE) . Khi đó giá trị biểu thức $\frac{5a^2\sqrt{51}}{S}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} N \in (MNE) \cap (ABD) \\ AB // (MNE) \\ AB \subset (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow (MNE) \cap (ABD) = \Delta.$$

$\Delta \cap BD = P$ nên $(MNE) \cap (ABD) = NP$ đồng thời P là trung điểm BD .

Gọi $Q = PE \cap BC$. Do đó, $(MNE) \cap (BCD) = PQ$.

$$(MNE) \cap (ABC) = MQ$$

$$(MNE) \cap (ACD) = MN$$

Khi đó, thiết diện hình chóp cắt bởi (MNE) là tứ giác $MNPQ$.

Mặt khác, $NP // MQ$ nên $MNPQ$ là hình thang.

$$\text{Lại có: } AM = \frac{1}{3}AB = \frac{2a}{3}, AN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}, PN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}, MQ = \frac{1}{3}AB = \frac{a}{3}.$$

$$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{\left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

$$\text{Mà } \Delta MAN = \Delta QBP \text{ nên } MN = PQ = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

$$\text{Kẻ } MI \perp NP, QH \perp NP. \text{ Vì } \Delta MNI = \Delta PQH \text{ nên } MI = HQ = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3} \right) = \frac{a}{12}.$$

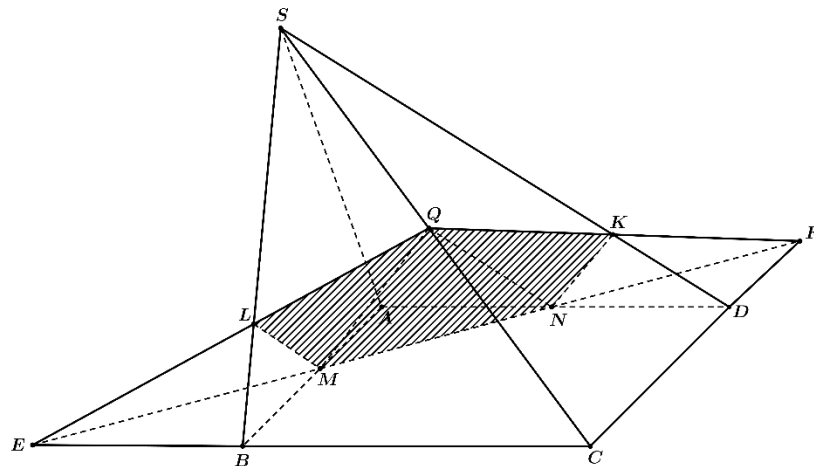
$$NI = \sqrt{MN^2 - MI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{13}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{12}\right)^2} = \frac{a\sqrt{51}}{12}.$$

$$\text{Vì vậy, diện tích thiết diện là } S = \frac{1}{2}(NP + MQ) \cdot NI = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{3} \right) \cdot \frac{a\sqrt{51}}{12} = \frac{5a^2\sqrt{51}}{144}.$$

$$\text{Khi đó } S = \frac{5a^2\sqrt{51}}{144} \Rightarrow \frac{5a^2\sqrt{51}}{S} = 144.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SC . Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNQ) là đa giác có bao nhiêu cạnh?

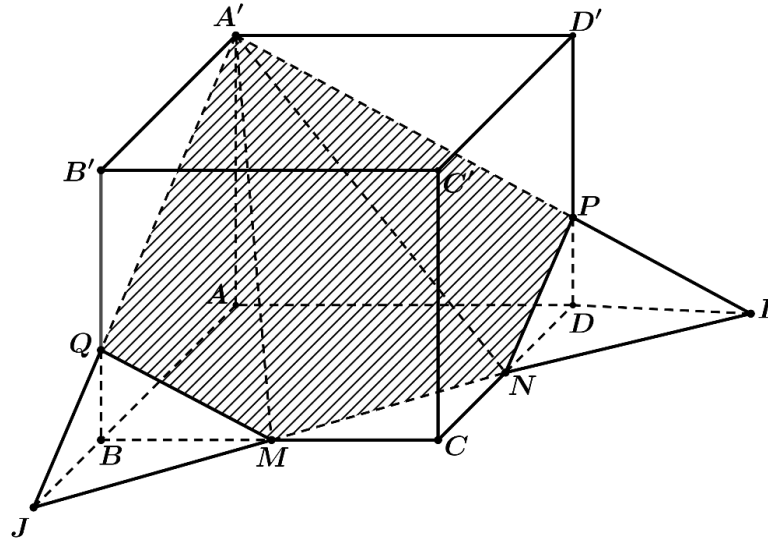
Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi E, F lần lượt là giao điểm của MN với BC, CD .

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Diện tích thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng $(A'MN)$ bằng $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Khi đó $T = a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



$$MN \cap AD = I, MN \cap AB = J, A'I \cap DD' = P, A'J \cap BB' = Q.$$

Suy ra thiết diện là ngũ giác $A'PNMQ$.

$$\triangle DNI = \triangle CMN = \triangle BMJ \Rightarrow JB = ID = BM = DN = 1 \Rightarrow PD = BQ = \frac{1}{3}AA' = \frac{2}{3};$$

$$\text{Ta có } QJ = QM = \frac{\sqrt{13}}{3}, JM = \sqrt{2} \Rightarrow S_{\triangle QJM} = \frac{\sqrt{17}}{6} \text{ (áp dụng công thức Heron)}$$

$$\text{Tương tự } PN = PI = \frac{\sqrt{13}}{3}, NI = \sqrt{2} \Rightarrow S_{\triangle PNI} = \frac{\sqrt{17}}{6}.$$

$$\text{Mặt khác } A'I = A'J = \sqrt{13}, JI = \sqrt{18} \Rightarrow S_{\triangle A'JI} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Từ đó suy ra } S_{A'PNMQ} = S_{\triangle A'JI} - S_{\triangle QJM} - S_{\triangle PNI} = \frac{3\sqrt{17}}{2} - \frac{\sqrt{17}}{6} - \frac{\sqrt{17}}{6} = \frac{7\sqrt{17}}{6}$$

$$\text{Vậy } a = 7; b = 17; c = 6 \Rightarrow T = a + b + c = 7 + 17 + 6 = 30.$$

-----**HẾT**-----